3. STEPENI ČVOROVA I GRAFIČKI NIZOVI

Definicija:

Neka je G graf sa skupom čvorova $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Ako je $d_i = d(v_i)$, $i = \overline{1, n}$, niz $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je niz stepena čvorova grafa G.

Čvorovi grafa se obično označavaju tako da je niz stepena njegovih čvorova monoton:

$$0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n \leq n - 1$$

ili

$$n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$$

Definicija:

Niz nenegativnih cijelih brojeva $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *je grafički ako postoji graf* G *čiji je ovo niz stepena čvorova*

Teorema

(Havel1955., Hakimi 1962.)
Niz nenegativnih cijelih brojeva $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$*, takav da važi*

$$n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$$

je grafički akko je grafički niz

$$D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$$

Dokaz.

$\Leftarrow$

- Neka je $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}$ niz stepena čvorova grafa G' sa skupom čvorova $V' = \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$
- v_1 - novi čvor, $V(G) = V' \cup \{v_1\}$ $E(G) = E(G') \cup \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), \ldots, (v_1, v_{d_1+1})\}$
- $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je niz stepa čvorova grafa G.

$\square$

$\Rightarrow$

- Ω - familija svih grafova sa skupom čvorova $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ i nizom stepena $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, takvim da važi
$$n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$$
- $S = \{v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}\}$, $f : \Omega \rightarrow N$ preslikavanje definisano sa
$$f(H) = |N_H(v_1) \cap S|,$$
$N_H(v_1)$ - skup susjeda čvora v_1 u grafu H
- $G \in \Omega$ graf na kome f dostiže maksimum
- cilj: pokazati da je $f(G) = d_1$, t.j. $S = N_G(v_1)$

Pretpostavimo suprotno, t.j. $S \neq N_G(v_1)$. Tada postoje:

- $v_i \in S$ tako da $v_1 \nsim v_i$
- $v_j \notin S$ tako da $v_1 \sim v_j$

Kako je $i < j$ (ZAŠTO??), to je $d_i \geq d_j$, pa postoji v_k tako da je: $v_i \sim v_k$ i $v_j \nsim v_k$

- Neka je

$$G_1 = G - \{(v_1, v_j), (v_i, v_k)\} + \{(v_1, v_i), (v_j, v_k)\}$$

G_1 - graf dobijem iz G uklanjanjem grana (v_1, v_j) i (v_i, v_k) i dodavanjem grana (v_1, v_i) i (v_j, v_k).

- $G_1 \in \Omega$ i $f(G_1) = f(G) + 1$.

KRAJ DOKAZA

Primjer:

Ispitati da li su sljedeći nizovi grafički:

a) $(5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1)$
b) $(6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$
c) $(4, 4, 4, 4, 3, 3)$
d) $(7, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 1)$
e) $(7, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$